# Unidad III

**Sistemas de ecuaciones Lineales.**

En matemáticas y álgebra lineal, un **sistema de ecuaciones lineales**, también conocido como **sistema lineal de ecuaciones** o simplemente **sistema lineal**, es un conjunto de ecuaciones lineales (es decir, un sistema de ecuaciones en donde cada ecuación es de primer grado), definidas sobre un cuerpo o un anillo conmutativo. Un ejemplo de sistema lineal de ecuaciones sería el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

El problema consiste en encontrar los valores desconocidos de las variables $x_1$, $x_2$ y $x_3$ que satisfacen las tres ecuaciones.

El problema de los sistemas lineales de ecuaciones es uno de los más antiguos de la matemática y tiene una infinidad de aplicaciones, como en procesamiento digital de señales, análisis estructural, estimación, predicción y más generalmente en programación lineal así como en la aproximación de problemas no lineales de análisis numérico.

**3.1 Definición de sistemas de ecuaciones lineales.**

En matemáticas y álgebra lineal, un sistema de ecuaciones lineales, también conocido como sistema lineal de ecuaciones o simplemente sistema lineal, es un conjunto de ecuaciones lineales (es decir, un sistema de ecuaciones en donde cada ecuación es de primer grado), definidas sobre un cuerpo o un anillo conmutativo. Un ejemplo de sistema lineal de ecuaciones sería el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

El problema consiste en encontrar los valores desconocidos de las variables x1, x2 y x3 que satisfacen las tres ecuaciones.

El problema de los sistemas lineales de ecuaciones es uno de los más antiguos de la matemática y tiene una infinidad de aplicaciones, como en procesamiento digital de señales, análisis estructural, estimación, predicción y más generalmente en programación lineal así como en la aproximación de problemas no lineales de análisis numérico.

En general, un sistema con m ecuaciones lineales y n incógnitas puede ser escrito en forma normal como:

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & =b_m \end{array}$$

Donde $x_1, \dots, x_n$ son las incógnitas y los números $a_{ij} \in \mathbb{K}$ son los coeficientes del sistema sobre el cuerpo $\mathbb{K}\ [= \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots]$. Es posible reescribir el sistema separando con coeficientes con notación matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Si representamos cada matriz con una única letra obtenemos: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Donde A es una matriz m por n, x es un vector columna de longitud n y b es otro vector columna de longitud m. El sistema de eliminación de Gauss-Jordan se aplica a este tipo de sistemas, sea cual sea el cuerpo del que provengan los coeficientes.

## 3.2 Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales y tipos de solución.

= Clasificación =

Podemos clasificar los sistemas de ecuaciones lineales según su número de soluciones de la siguiente forma:
Sistemas con una solución: Las ecuaciones del sistema son rectas secantes. Se cortan en un punto (x, y) que es la solución del sistema
Sistemas sin solución: Las ecuaciones del sistema son rectas paralelas. No tienen ningún punto en común, y por tanto no hay solución
Sistemas con infinitas soluciones: Las ecuaciones del sistema son rectas coincidentes. Tienen todos los puntos en común, y por tanto todos ellos son solución
Condiciones que deben cumplir las ecuaciones para que el sistema tenga una, ninguna o infinitas soluciones:
Una solución: Los coeficientes de x e y de las dos ecuaciones no son proporcionales.

Ejemplo: $\begin{cases} 2x & -3y & =1 \\ x & +5y & =7 \end{cases}$

Ninguna solución: Los coeficientes de x e y de una ecuación son proporcionales a los de la otra, mientras que los términos independientes no lo son.

Ejemplo: $\begin{cases} 2x & -3y & =1 \\ 4x & -6y & =7 \end{cases}$

Infinitas soluciones: Los coeficientes de x e y, y el término independiente de una ecuación, son proporcionales a los de la otra.

Ejemplo: $\begin{cases} 2x & -3y & =1 \\ 4x & -6y & =2 \end{cases}$

=Tipos de Solución=

=Sustitución=

El método de sustitución consiste en despejar en una de las ecuaciones cualquier incógnita, preferiblemente la que tenga menor coeficiente, para, a continuación, sustituirla en otra ecuación por su valor.

En caso de sistemas con más de dos incógnitas, la seleccionada debe ser sustituida por su valor equivalente en todas las ecuaciones excepto en la que la hemos despejado. En ese instante, tendremos un sistema con una ecuación y una incógnita menos que el inicial, en el que podemos seguir aplicando este método reiteradamente. Por ejemplo, supongamos que queremos resolver por sustitución este sistema:

$$\begin{cases} 3x & +y & = & 22 \\ 4x & -3y & = & -1 \end{cases}$$

En la primera ecuación, seleccionamos la incógnita y por ser la de menor coeficiente y que posiblemente nos facilite más las operaciones, y la despejamos, obteniendo la siguiente ecuación.

$$y = 22 - 3x$$

El siguiente paso será sustituir cada ocurrencia de la incógnita y en la otra ecuación, para así obtener una ecuación donde la única incógnita sea la x.

$$4x - 3(22 - 3x) = -1 \qquad \Rightarrow 4x - 66 + 9x = -1 \qquad \Rightarrow 13x - 66 = -1, \qquad \Rightarrow 13x = 6$$

Al resolver la ecuación obtenemos el resultado x=5, y si ahora sustituimos esta incógnita por su valor en alguna de las ecuaciones originales obtendremos y=7, con lo que el sistema queda ya resuelto.

=Igualación=

El método de igualación se puede entender como un caso particular del método de sustitución en el que se despeja la misma incógnita en dos ecuaciones y a continuación se igualan entre sí la parte derecha de ambas ecuaciones.

Tomando el mismo sistema utilizado como ejemplo para el método de sustitución, si despejamos la incógnita $y$ en ambas ecuaciones nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} y = & 22 - 3x \\ y = & \dfrac{4x+1}{3} \end{cases}$$

Como se puede observar, ambas ecuaciones comparten la misma parte izquierda, por lo que podemos afirmar que las partes derechas también son iguales entre sí.

$$22 - 3x = \frac{4x+1}{3} \Rightarrow \quad 3(22-3x) = 4x + 1 \Rightarrow \quad 65 = 13x \Rightarrow \quad x = 5$$

Una vez obtenido el valor de la incógnita x, se substituye su valor en una de las ecuaciones originales, y se obtiene el valor de la y.

La forma más fácil de tener el método de sustitución es realizando un cambio para despejar x después de averiguar el valor de la y.

=Reducción=

Este método suele emplearse mayoritariamente en los sistemas lineales, siendo pocos los casos en que se utiliza para resolver sistemas no lineales. El procedimiento, diseñado para sistemas con dos ecuaciones e incógnitas, consiste en transformar una de las ecuaciones (generalmente, mediante productos), de manera que obtengamos dos ecuaciones en la que una misma incógnita aparezca con el mismo coeficiente y distinto signo. A continuación, se suman ambas ecuaciones produciéndose así la reducción o cancelación de dicha incógnita, obteniendo así una ecuación con una sola incógnita, donde el método de resolución es simple. Por ejemplo, en el sistema:

$$\begin{cases} 2x & +3y & = 5 \\ 5x & +6y & = 4 \end{cases}$$

no tenemos más que multiplicar la primera ecuación por -2 para poder cancelar la incógnita y. Al multiplicar, dicha ecuación nos queda así:

$$-2(2x + 3y = 5) \quad \longrightarrow \quad -4x - 6y = -10$$

Si sumamos esta ecuación a la segunda del sistema original, obtenemos una nueva ecuación donde la incógnita y ha sido reducida y que, en este caso, nos da directamente el valor de la incógnita x:

$$\begin{array}{rrcr} -4x & -6y & = & -10 \\ 5x & +6y & = & 4 \\ \hline x & & = & -6 \end{array} \quad x = -6$$

El siguiente paso consiste únicamente en sustituir el valor de la incógnita x en cualquiera de las ecuaciones donde aparecían ambas incógnitas, y obtener así que el valor de y es igual a:

$$y = \frac{17}{3}$$

=Método Gráfico=
Consiste en construir la gráfica de cada una de las ecuaciones del sistema. El método (manualmente aplicado) solo resulta eficiente en el plano cartesiano, es decir para un espacio de dimensión 2.

El proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante el método gráfico se resuelve en los siguientes pasos:
Se despeja la incógnita (y) en ambas ecuaciones.
Se construye para cada una de las dos ecuaciones de primer grado obteniendo la tabla de valores correspondientes.
Se representan gráficamente ambas rectas en los ejes coordenados.
En este último paso hay tres posibilidades:
Si ambas rectas se cortan, las coordenadas del punto de corte son los únicos valores de las incógnitas (x,y). "Sistema compatible determinado".
Si ambas rectas son coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones que son las respectivas coordenadas de todos los puntos de esa recta en la que coinciden ambas. «Sistema compatible indeterminado».
Si ambas rectas son paralelas, el sistema no tiene solución.
=Método de Gauss=
La eliminación de Gauss-Jordan, más conocida como método de Gauss, es un método aplicable únicamente a los sistemas lineales de ecuaciones, y consistente en triangular la matriz aumentada del sistema mediante transformaciones elementales, hasta obtener ecuaciones de una sola incógnita, cuyo valor será igual al coeficiente situado en la misma fila de la matriz. Este procedimiento es similar al anterior de reducción, pero ejecutado de manera reiterada y siguiendo un cierto orden algorítmico.

El Método de Gauss consiste en convertir un sistema normal de 3 ecuaciones con 3 incognitas en uno escalonado, en la que la primera ecuación tiene 3 incógnitas, la segunda ecuación tiene 2 incógnitas, y la tercera ecuación tiene 1 incógnita. De esta forma será fácil a partir de la última ecuación y subiendo, calcular el valor de las tres incógnitas.

En primer lugar, reducimos la incógnita x, sumando a la segunda fila, la primera multiplicada por 2/3, y a la tercera, la primera fila. La matriz queda así:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

El siguiente paso consiste en eliminar la incógnita y en la primera y tercera fila, para lo cual les sumamos la segunda multiplicada por -2 y por -4, respectivamente.

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Por último, eliminamos la z, tanto de la primera como de la segunda fila, sumándoles la tercera multiplicada por -2 y por 1/2, respectivamente:

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Llegados a este punto podemos resolver directamente las ecuaciones que se nos plantean:

$$\begin{cases} 2x = 4 \\ \dfrac{y}{2} = \dfrac{3}{2} \\ -z = 1 \end{cases}$$

O, si lo preferimos, podemos multiplicar las tres filas de la matriz por: 1/2, 2 y -1 respectivamente, y obtener así automáticamente los valores de las incógnitas en la última columna.

$$\begin{cases} x = & 2 \\ y = & 3 \\ z = & -1 \end{cases}$$

Pongamos un ejemplo del cálculo de un sistema de ecuaciones por el método de Gauss:Se reúnen 30 personas entre hombres, mujeres y niños. Se sabe que entre los hombres y el triple de mujeres exceden en 20 el doble de los niños. También se sabe que entre hombres y mujeres se duplican al número de niños. Plantear y resolver el sistema de ecuaciones.x=numero de hombres; y=numero de mujeres; y z=numero de niños. Se reúnen 30 personas entre hombres, mujeres y niños: x+y+z=30. Se sabe que entre los hombres y el triple de mujeres exceden en 20 el doble de los niños: x+3y=2z+20. También se sabe que entre hombres y mujeres se duplican al número de niños: x+y=2z.

Agrupando las tres ecuaciones tenemos el sistema, que ordenado resulta:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ x + 3y = 2z + 20 \\ x + y = 2z \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & 30 \\ x & +3y & -2z & = & 20 \\ x & +y & -2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Aplicamos Gauss, restando la primera ecuación a las dos siguientes:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & = & 30 \\ & 2y & -3z & = & -10 \\ & & -3z & = & -30 \end{array}\right.$$

En este caso en la tercera ecuación se ha eliminado la y, por lo que no es necesario hacer más operaciones. Por lo tanto obtenemos que z = 10 de la tercera ecuación:

$$-3z = -30 \longrightarrow \quad z = \frac{-30}{-3} \longrightarrow \quad z = 10$$

Sustituyendo z en la segunda ecuación obtenemos que y = 10:

$$\left.\begin{array}{rrcr} 2y & -3z & = & -10 \\ & z & = & 10 \end{array}\right\} \longrightarrow \quad 2y - 30 = -10 \longrightarrow \quad 2y = 20 \longrightarrow \quad y = 10$$

Sustituyendo z é y en la primera ecuación obtenemos x = 10.

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 30 \\ & y & & = & 10 \\ & & z & = & 10 \end{array}\right\} \longrightarrow \quad x+10+10 = 30 \longrightarrow \quad x = 30-10-10 \longrightarrow \quad x = 10$$

Con lo que hemos obtenido el resultado del sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ x + 3y = 2z + 20 \\ x + y = 2z \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 10 \\ z = 10 \end{array}\right.$$

=Método de Cramer=

La regla de Cramer da una solución para sistemas compatibles determinados en términos de determinantes y adjuntos dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(\mathbf{A})}$$

Donde Aj es la matriz resultante de remplazar la j-ésima columna de A por el vector columna b. Para un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} a\,x & + & b\,y & = e \\ c\,x & + & d\,y & = f \end{cases}$$

La regla de Cramer da la siguiente solución:

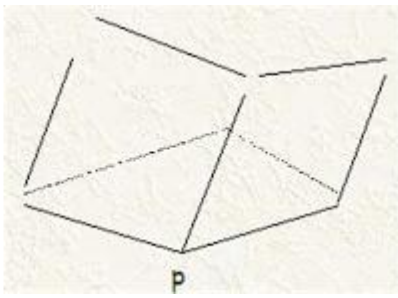
$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Nota: Cuando en la determinante original det(A) el resultado es 0, el sistema indica múltiples o sin coincidencia.

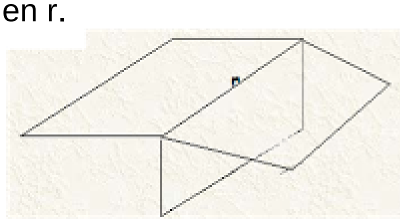
### 3.3 Interpretación geométrica de las soluciones.

Cada ecuación representa un plano en el espacio tridimensional. Luego se trata de estudiar la posición relativa de tres planos en el espacio. Las soluciones del sistema son geométricamente los puntos de intersección de los tres planos, los casos son:

=Un punto único. Sistema compatible determinado.. Los tres planos se cortan en P.



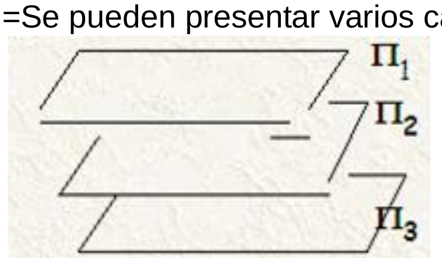

=Una recta. Son soluciones todos los puntos representativos de la recta común. Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad. Los planos se cortan en r.



=Un plano. Los planos son coincidentes. El sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad.

=Ningún punto. El sistema es incompatible. Esta situación se presenta geométricamente de distintas maneras. Para estudiar las posiciones relativas de los planos hay que tomarlos de dos en dos.

=Se pueden presentar varios casos: Que los planos sean paralelos:



**3.4 Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales: Gauss, Gauss-Jordan, inversa de una matriz y regla de Cramer.**

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE GAUSS-JORDAN

Es el método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, que consiste en llegar a un sistema "escalonado" transformando la matriz ampliada en una matriz escalonada por filas. El método de Gauss es una generalización del método de reducción, que utilizamos para eliminar una incógnita en los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Consiste en la aplicación sucesiva del método de reducción, utilizando los criterios de equivalencia de sistemas, para transformar la matriz ampliada con los términos independientes ( A* ) en una matriz triangular, de modo que cada fila (ecuación) tenga una incógnita menos que la inmediatamente anterior. Se obtiene así un sistema, que llamaremos escalonado, tal que la última ecuación tiene una única incógnita, la penúltima dos incógnitas, la antepenúltima tres incógnitas, ..., y la primera todas las incógnitas.

El siguiente esquema muestra cómo podemos resolver un sistema de ecuaciones lineales aplicando este método.

Partimos, inicialmente, de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, compatible determinado:

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\dotfill \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}$$

En primer lugar, aplicando sucesivamente el método de reducción, eliminamos en todas las ecuaciones, excepto en la primera, la incógnita x1, obteniéndose un sistema equivalente:

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad\quad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n = r_2 \\
\qquad\quad c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + \dots + c_{3n}x_n = r_3 \\
\dotfill \\
\qquad\quad c_{n2}x_2 + c_{n3}x_3 + \dots + c_{nn}x_n = r_n
\end{array}$$

En segundo lugar, aplicando nuevamente el método de reducción de forma sucesiva, eliminamos en todas las ecuaciones, excepto en las dos primeras, la incógnita x2, obteniéndose un sistema equivalente:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & a_{13} x_3 & + & \dots & + & a_{1n} x_n & = & b_1 \\
 & & c_{22} x_2 & + & c_{23} x_3 & + & \dots & + & c_{2n} x_n & = & r_2 \\
 & & & & d_{33} x_3 & + & \dots & + & d_{3n} x_n & = & s_3 \\
\dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\
 & & & & d_{n3} x_3 & + & \dots & + & d_{nn} x_n & = & s_n
\end{array}
$$

Para resolverlo despejamos, en primer lugar, la única incógnita de la última ecuación. Luego sustituimos ésta en la penúltima ecuación y despejamos la otra incógnita. Posteriormente, sustituimos dos de las tres incógnitas de la antepenúltima ecuación por sus valores y despejamos la que queda, y así sucesivamente hasta llegar a la primera ecuación.

Las transformaciones que podemos realizar en dicha matriz para transformar el sistema inicial en otro equivalente son las siguientes:
Multiplicar o dividir una fila por un número real distinto de cero.
Sumarle o restarle a una fila otra fila.
Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un número distinto de cero.
Cambiar el orden de las filas.
Cambiar el orden de las columnas que corresponden a las incógnitas del sistema, teniendo en cuenta los cambios realizados a la hora de escribir el nuevo sistema equivalente. Es decir: si, por ejemplo, la 2ª columna corresponde a la incógnita y y la tercera a la incógnita z, y cambiamos el orden de las columnas, ahora la 2ª columna corresponde a la incógnita z y la tercera a la incógnita y.
Eliminar filas proporcionales o que sean combinación lineal de otras.
Eliminar filas nulas (0 0 0 ... 0).
Después de realizar las transformaciones que se consideren pertinentes, se obtendrá un sistema escalonado. Suponiendo que hubiésemos eliminado, si las hubiera, las filas nulas (0 0 0 ... 0), que corresponden a ecuaciones del tipo 0 = 0, el sistema equivalente tendría ahora k ecuaciones lineales con n incógnitas.

Analizando el sistema resultante, podemos efectuar su discusión del siguiente modo:
Si alguna de las ecuaciones es del tipo 0 = b (siendo b distinto de cero), el sistema es incompatible y no tiene solución.
Si no hay ecuaciones del tipo 0 = b, y además k = n, es decir, el número de ecuaciones del sistema equivalente es igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado y, por lo tanto, tiene una única solución.
Si no hay ecuaciones del tipo 0 = b y k < n, es decir, el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado y, en consecuencia, tiene infinitas soluciones. En este caso, tenemos que separar las incógnitas principales de las no principales.
Pero, ¿cuáles son las incógnitas principales? Se puede dar el siguiente criterio: Si el sistema es escalonado y tiene k ecuaciones, las k primeras incógnitas serán las principales y las n - k restantes serán las no principales que pasaremos al segundo miembro como parámetros.

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE CRAMER. REGLA DE CRAMER

La regla de Cramer utiliza las propiedades de las matrices y sus determinantes para despejar, por separado, una cualquiera de las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales.

REGLA DE CRAMER

Un sistema de ecuaciones lineales recibe el nombre de sistema de Cramer cuando se cumplen las dos condiciones siguientes:

El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

El determinante de la matriz de los coeficientes (matriz del sistema) es distinto de cero (det ( A ) ≠ 0)

Un sistema de Cramer es, por definición, compatible determinado, puesto que se cumple que rango (A) = rango (A*) = n (nº de incógnitas).

Consideremos un sistema de Cramer, es decir, un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, cuya expresión general es la siguiente:

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}$$

Sean A la matriz del sistema , entonces det (A) ≠0.

Llamaremos matriz asociada a la incógnita xi y la designaremos por Ai a la matriz que se obtiene al sustituir en la matriz del sistema la columna i por la matriz columna de los términos independientes. Es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3i} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & b_3 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Todos los sistemas de Cramer son compatibles determinados. El valor de cada incógnita se obtiene dividiendo el determinante de la matriz asociada a dicha incógnita por la matriz del sistema (matriz de los coeficientes de las incógnitas).

$$x_i = \frac{\mathrm{Det}(A_i)}{\mathrm{Det}(A)} \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \;; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \;;$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \;; \cdots \;; \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

¿Se puede aplicar la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles que tengan más ecuaciones que incógnitas? La respuesta es afirmativa. Basta con obtener un sistema equivalente al inicial eliminando las ecuaciones superfluas o dependientes (proporcionales, nulas o que sean combinación lineal de otras).

El procedimiento a seguir es el siguiente: Supongamos que tenemos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, siendo m > n y tal que: rango (A) = rango (A*) = n. Por lo tanto, sobran m - n ecuaciones. Para averiguar cuáles son las ecuaciones de las que podemos prescindir, basta encontrar en la matriz de los coeficientes ( A ) un menor de orden n distinto de cero, por ejemplo, el que utilizamos para averiguar el rango de la matriz A.

Las filas que intervienen en este menor son las que corresponden a las ecuaciones principales. Las restantes ecuaciones las podemos suprimir.

Ejemplo: Sea el sistema de ecuaciones lineales formado por dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$$

Encontrar el valor de x e y mediante la regla de Cramer.

Empezaremos con el primer paso, que consiste en hallar la matriz ampliada A b asociada al sistema de ecuaciones lineales:

$$A|b = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

El segundo paso es calcular el determinante de A. Así pues:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17$$

Y el tercero y último paso consiste en calcular las incógnitas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}}{17} = \frac{11}{17} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{8}{17}$$

## MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA

Consideremos un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, cuya expresión general es la siguiente:

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots + a_{3n} x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{array}$$

Hemos visto que este sistema se puede escribir en forma matricial del siguiente modo: A X = B.

La matriz A se llama matriz del sistema, es de dimensión n x n y sus elementos son los coeficientes de las incógnitas.

La matriz X es una matriz columna, de dimensión n x 1, formada por las incógnitas del sistema. Por último, la matriz B es otra matriz columna, de dimensión n x 1, formada por los términos independientes. Es decir:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si el determinante de la matriz A es distinto de cero (det (A) ≠ 0 ), la matriz A tiene inversa ( A-1 ). Por lo tanto, podemos calcular la matriz de las incógnitas X del siguiente modo:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$$

Es decir, para calcular la matriz columna de las incógnitas ( X ), multiplicamos la inversa de la matriz A ( A-1 ) por la matriz columna de los términos independientes, obteniéndose otra matriz columna de la misma dimensión que X.

¿Se puede aplicar el método de la matriz inversa para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles que tengan más ecuaciones que incógnitas? La respuesta es afirmativa. Basta con obtener un sistema equivalente al inicial eliminando las ecuaciones superfluas o dependientes (proporcionales, nulas o que sean combinación lineal de otras).

El procedimiento a seguir es el siguiente: Supongamos que tenemos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, siendo m > n y tal que: rango (A) = rango (A*) = n. Por lo tanto, sobran m - n ecuaciones. Para averiguar cuáles son las ecuaciones de las que podemos prescindir, basta encontrar en la matriz de los coeficientes ( A ) un menor de orden n distinto de cero, por ejemplo, el que utilizamos para averiguar el rango de la matriz A. Las filas que intervienen en este menor son las que corresponden a las ecuaciones principales. Las restantes ecuaciones las podemos suprimir.

¿Se puede aplicar el método de la matriz inversa para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles indeterminados? La respuesta es también afirmativa. El procedimiento a seguir es el siguiente: Supongamos que tenemos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, tal que: rango (A) = rango (A*) = k < n. Por lo tanto, sobran m - k ecuaciones y, además, hay n - k incógnitas no principales. Para averiguar cuáles son las ecuaciones de las que podemos prescindir, y cuáles son las incógnitas no principales, basta encontrar en la matriz de los coeficientes ( A ) un menor de orden k distinto de cero, por ejemplo, el que utilizamos para averiguar el rango de la matriz A. Las filas que intervienen en este menor son las que corresponden a las ecuaciones principales o independientes. Las restantes ecuaciones las podemos suprimir. Las columnas que figuran en dicho menor corresponden a las incógnitas principales. Las incógnitas no principales las pasamos al otro miembro y pasan a formar un único término junto con el término independiente. Se obtiene, de este modo, un sistema de k ecuaciones lineales con k incógnitas, cuyas soluciones van a depender de n - k parámetros (correspondientes a las incógnitas no principales).

### 3.5 Aplicaciones.

=Fracciones parciales =
Una técnica muy conveniente utilizada en algunas tareas matemáticas es aquella conocida como fracciones idea principal consiste en cambiar la forma que puede ser expresado un cociente entre polinomios a otra forma más conveniente para cierto tipo de cálculo.

Ejemplo 4.1 Determine los valores de las constantes a y b para que satisfagan:

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}$$

SOLUCIÓN

Se debe cumplir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-2)(x+3)} &= \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3} \\
&= \frac{a\,(x+3)+b\,(x-2)}{(x-2)\,(x+3)} \\
&= \frac{a\,x+3\,a+b\,x-2\,b}{(x-2)(x+3)} \\
&= \frac{(3\,a-2\,b)+(a+b)\,x}{(x-2)(x+3)}
\end{aligned}$$

Esto se cumple si:

$$1 + 0 * x = 1 = (3\,a - 2\,b) + (a + b)\,x$$

Es decir, si:

$$\begin{array}{rcrcl}
3\,a & - & 2\,b & = & 1 \\
a & + & b & = & 0
\end{array}$$

El cual tiene como solución:

$$a = \frac{1}{5} \text{ y } b = -\frac{1}{5}$$

Ejemplo: (Forma dudosa) Determine los valores de las constantes a y b para que satisfagan:

$$\frac{2 + 2x + 2x^2}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x^2 + 1}$$

SOLUCIÓN

Se debe cumplir:

$$\begin{aligned}
\frac{2+2x+2x^2}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x^2+1} \\
&= \frac{a\,(x^2+1)+b\,(x+1)}{(x+1)\,(x^2+1)} \\
&= \frac{a\,x^2+a+b\,x+b}{(x+1)(x^2+1)} \\
&= \frac{(a+b)+(b)\,x+a\,x^2}{(x+1)(x^2+1)}
\end{aligned}$$

Esto se cumple si:

$$2 + 2x + 2x^2 = (a + b) \; + \; (b)\,x + a\,x^2$$

Es decir, si:

$$\begin{array}{ccccc}
a & + & b & = & 2 \\
 & + & b & = & 2 \\
a & & & = & 2
\end{array}$$

= Determinación de curvas =
Un problema comun en diferentes ´areas es la determinaci´on de curvas. es decir el problema de encontrar la función que pasa por un conjunto de puntos. Usualmente se conoce la naturaleza de la función, es decir, se conoce la forma que debe tener la función. Por ejemplo, línea recta, parábola o exponencial etc. Lo que se hace para resolver este tipo de problemas es describir la forma más general de la función mediante parámetros constantes. Y posteriormente se determinan estos parámetros haciendo pasar la función por los puntos conocidos.

Ejemplo: Determine la función cudrática que pasa por los puntos P (1, 4), Q(−1, 2), y R(2, 3).

Solución
La forma más general de una cuadrática es: f (x) = a x2 + b x + c donde los coeficientes a, b, y c son constantes num´ericas. El problema consiste en determinar estos coeficientes.

Así pues los parámetros a, b, y c se vuelven ahora las incógnitas. Y para poderlas determinar requerimos de ecuaciones o igualdades que deben satisfacer. Para determinar estas ecuaciones debemos usar los puntos.

Para que la función pase por el punto P (1, 4) se debe cumplir que f (x = 1) = 4, es decir, se debe cumplir: a (1)2 + b (1) + c = 4 es decir, se debe cumplir: $a + b + c = 4$

Procediendo de igual manera con el punto $Q(-1, 2)$: formulamos la ecuación: $a - b + c = 2$ y para $R(2, 3)$: $4a + 2b + c = 3$.
Resumiendo para que la función $f(x) = a x^2 + b x + c$ pase por los puntos P , Q, y R deben cumplirse las ecuaciones:
$a + b + c = 4$
$a - b + c = 2$
$4a + 2b + c = 3$
La solución a este sistema es: $a = 2/3$, $b = 1$, y $c = 11/3$

La misma situación presentada en el problema de las fracciones parciales que originaba un sistema inconsistente, se puede presentar en la determinación de funciones. Y la conclusión es similar: si el sistema originado es inconsistente lo que se concluye es que no existe una funci´on con esa forma general que pase exactamente por los puntos dados.

=Balanceo de Reacciones Químicas=
Una aplicación sencilla de los sistemas de ecuaciones se da en el balanceo de reacciones químicas. La
problemática consiste en determinar el número entero de moléculas que intervienen en una reacción química
cuidando siempre que el número de átomos de cada sustancia se preserve.

Ejemplo Balancee la reacción química: $aCH_4 + bO_2 = cCO_2 + dH_2O$

Solución: Para determinar los coeficientes a, b, c, y d que representan el numero de moléculas de las sustancias en la reacción debemos igualar el numero
de átomos en cada miembro:
Por los átomos de carbono: $a = c$. Por los átomos de oxigeno: $2b = 2c + d$. Por los átomos de hidrógeno: $4a = 2d$

Este sistema es consistente y origina infinitas soluciones. La f´ormula general para las soluciones queda:
$a = 1/2\, d$
$b = d$
$c = 1/2\, d$

El valor más pequeño de d que hace que los números de moléculas sean enteros positivos es $d = 2$: $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, y $d = 2$

=Aplicaciones a Manufactura=
Ejemplo: Patito computers fabrica tres modelos de computadoras personales: ca˜non, clon, y lenta-pero-segura. Para armar una computadora modelo ca˜non necesita 12 horas de ensamblado, 2.5 para probarla, y 2 mas para instalar sus programas. Para una clon requiere 10 horas de ensamblado, 2 para probarla, y 2 para instalar programas. Y por ´ultimo, para una lenta-pero-segura requiere 6 para

ensamblado, 1.5 para probarla, y 1.5 para instalar programas. Si la f´abrica dispone en horas por mes de 556 para ensamble, 120 para pruebas, y 103 horas para instalación de programas, ¿cu´antas computadoras se pueden producir por mes?

Solución
En nuestro caso las incógnitas el n´umero de cada tipo de computadora a producir:
x = n´umero de computadoras cañón
y = n´umero de computadoras clon
z = n´umero de computadoras lenta-pero-segura

Para determinar las ecuaciones debemos utilizar los tiempos de ensamblado, pruebas, e instalación de programas.

Ensamblado: 556(total) = 12 x(cañon) + 10 y(clon) + 6 z(lenta)
Pruebas: 120(total) = 2.5 x(cañon) + 2 y(clon) + 1.5 z(lenta)
Instalación de programas: 103(total) = 2 x(cañon) + 2 y(clon) + 1.5 z(lenta)
Al resolver este sistema obtenemos: x = 34, y = 4, z = 18

Dado lo común de las aplicaciones hacia el área de manufactura, existe una forma simple de construir la matriz del sistema de ecuaciones que en general se trabaja como una tabla:
En la ultima columna aparecen los recursos: un renglón para cada tipo de recursos y en cuya posición final se pone el total de recursos disponibles.
En las primera columnas se colocan los objetos o modelos a ser ensamblados o construidos: en cada posición se coloca el total de recursos que consume en forma unitaria cada tipo de objeto.

| | Recursos requeridos por unidad | | | |
|---|---|---|---|---|
| Recurso | Cañon | Clon | Lenta | Total |
| Ensamble | 12 | 10 | 6 | 556 |
| Pruebas | 2.5 | 2 | 1.5 | 120 |
| Instalación | 2 | 2 | 1.5 | 103 |